

EXERCICES SUR LE PRODUIT SCALAIRE

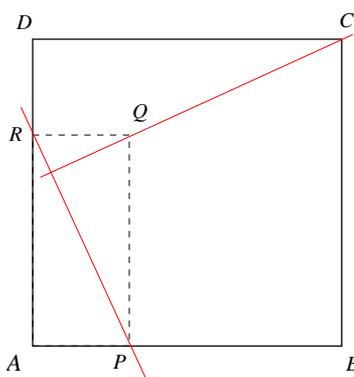
Dans toute cette série d'exercices, les repères considérés sont tous **orthonormaux**.

Exercice 1

Soit un carré $ABCD$. On construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$

Le problème a pour objet de montrer que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



1. Justifier que :

$$\vec{CQ} \cdot \vec{PR} = \vec{CQ} \cdot (\vec{AR} - \vec{AP})$$

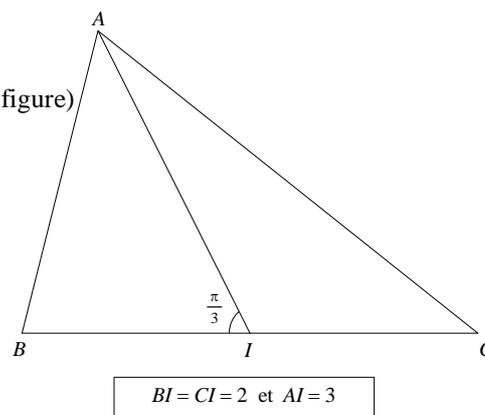
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 2

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. (Voir les données sous la figure)

Calculer :

1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
2. $AB^2 + AC^2$
3. $AB^2 - AC^2$
4. AB et AC



Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

Exercice 4

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5 ; 1)$ et tangent à la droite D d'équation :

$$x + y - 4 = 0$$

Indication : On rappelle que la distance entre un point $A(\alpha ; \beta)$ et une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est

donnée par la formule :

$$d(A ; D) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère un triangle ABC dans un repère orthonormal avec $A(-1 ; 2)$, $B(3 ; 1)$ et $C(2 ; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

Exercice 6

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne un point $\Omega(2 ; -3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon $R = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2 ; 0)$ est un point du cercle \mathcal{C} .
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle \mathcal{C} .

Exercice 7

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2 ; 1), B(7 ; 2) \text{ et } C(3 ; 4)$$

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A, 3)(B, 2)(C, -4)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. L'angle \widehat{A} est-il droit ?

Exercice 8

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$
2. $\vec{CA} \cdot \vec{CI}$
3. $(\vec{AB} - \vec{AC}) \cdot \vec{AI}$

Exercice 9

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$.

Ce triangle est-il rectangle ? (Si oui, préciser en quel sommet)

Exercice 10

$MNPQ$ est un carré avec $MN = 6$. I est le centre du carré. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\vec{MN} \cdot \vec{QP}$$

$$\vec{MN} \cdot \vec{PN}$$

$$\vec{IN} \cdot \vec{IP}$$

$$\vec{QI} \cdot \vec{NI}$$

Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$. En déduire BD .

Exercice 12

Démontrer que :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

Lien avec le losange, le parallélogramme ?

Démontrer que :

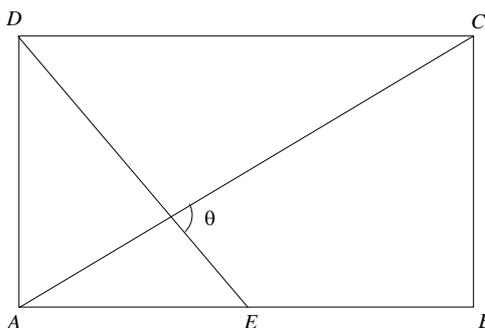
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

Exercice 13

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$.

E est le milieu de $[AB]$.



1. Calculer les longueurs AC et DE .

2. En exprimant chacun des vecteurs \vec{AC} et \vec{DE} en fonction des vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} , calculer le produit scalaire $\vec{AC} \cdot \vec{DE}$.

3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = (\vec{DE}; \vec{AC})$ en degrés à 0,01 près.

Exercice 14

Soit le triangle ABC et K le projeté orthogonal de A sur (BC) .

On donne : $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$.

1. I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC . Faire une figure.

2. Calculer les produits scalaires suivants : $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$, $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$, $\vec{IG} \cdot \vec{IB}$, ainsi que la somme :

$$\vec{GA} \cdot \vec{AC} + \vec{GB} \cdot \vec{AC} + \vec{GC} \cdot \vec{AC}$$

3. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que : $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = 44$.

4. Déterminer et représenter en vert l'ensemble des points M du plan tels que : $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot \vec{AC} = 0$.

Exercice 15

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $A(3 ; 5)$.

Chercher une équation de la tangente en A au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon OA .

Exercice 16

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, trouver une équation du cercle \mathcal{C} de centre $A(1 ; 2)$ et de rayon 3 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées.

Exercice 17

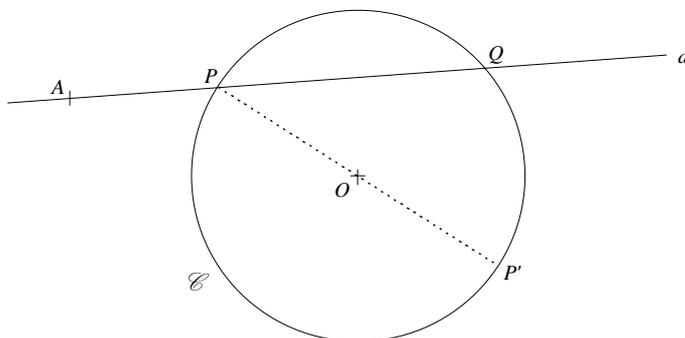
Soient $A(3 ; 1)$ et $B(-2 ; 4)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$(x - 3)(x + 2) + (y - 1)(y - 4) = 0$$

Exercice 18

\mathcal{C} est un cercle de centre O , de rayon R et A est un point fixé du plan.



Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite d passant par A , coupant le cercle \mathcal{C} en

deux points P et Q , le produit scalaire $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P . Montrer que :

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = \vec{AP} \cdot \vec{AP}'$$

2. Montrer que :

$$\vec{AP} \cdot \vec{AP}' = AO^2 - R^2$$

3. Conclure.

Exercice 19

On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer le centre et le rayon du cercle \mathcal{C} dont une équation est :

$$x^2 + y^2 - x + 8y + 10 = 0$$

Exercice 20

$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB = 2$ cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2 \vec{IM} \cdot \vec{AB}$

2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$

Exercice 21

On considère un segment $[AB]$ avec $AB = 1$ dm.

Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 1$

b) $MA^2 + MB^2 = 5$

Exercice 22

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation du cercle \mathcal{C} passant par $A(2 ; 1)$ et $B(1 ; 3)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite \mathcal{D} d'équation $x + y + 1 = 0$.

[Indication : chercher d'abord les coordonnées de Ω]

Exercice 23

Soit $ABCD$ un rectangle et M un point quelconque du plan. Démontrer que :

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point quelconque du plan. Démontrer que :

$$MD^2 - MC^2 = MA^2 - MB^2$$

Exercice 24

$ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a . I est le milieu du côté $[AB]$ et J est le milieu du côté $[CD]$.

1. Calculer (en fonction de a) les produits scalaires suivants : $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{AB} \cdot \vec{DA}$.

2. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$.

3. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\vec{AB} \cdot \vec{IJ}$.

Exercice 25

ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4$.

- 1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B .
- 2) Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ puis une mesure des angles \widehat{A} et \widehat{C} (en degrés à 10^{-1} près).

Exercice 26

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère le cercle C passant par les points $A(4; 2)$ et $B(2; 6)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite d d'équation $x + y + 2 = 0$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées de Ω .
3. Déterminer une équation de C .

Exercice 27

Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Soit ABC un triangle. On note A' , B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A , B et C sur (BC) , (AC) et (AB) .

On note $H = (BB') \cap (CC')$.

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\vec{BH} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{CH} \cdot \vec{AB}$?
2. Calculer $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$.
3. Conclure.

Exercice 28

Les vecteurs $\vec{u}(4876; -4898873)$ et $\vec{v}(317019173; 315539)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 29

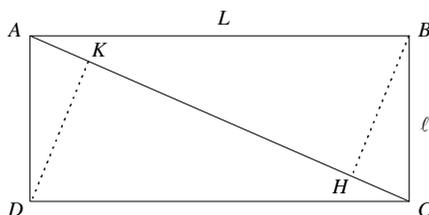
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation suivante est-elle celle d'une sphère ?

$$x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z + \frac{1}{2} = 0$$

Si oui, préciser les coordonnées de centre Ω et son rayon R .

Exercice 30

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et largeur ℓ . Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC) .



1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et ℓ .

[On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\vec{CA} \cdot \vec{BD}$]

2. Comment choisir L et ℓ pour avoir $AC = 2HK$? Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 31

À quelle condition sur les points A , B et C a-t-on : $(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = (AB + AC)^2$?

Exercice 32

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-2 ; 2)$ et $B(2 ; 2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$
3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 40$ est un cercle (C) de centre I et de rayon $r = 4$.
4. Déterminer une équation du cercle (C) .
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(\sqrt{7} ; \lambda)$ soit sur (C) ?
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en Z .

Exercice 33

$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O . On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1. Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
2. On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) . Calculer AP .

Exercice 34

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les deux cercles C_1 et C_2 d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2x = 4$$

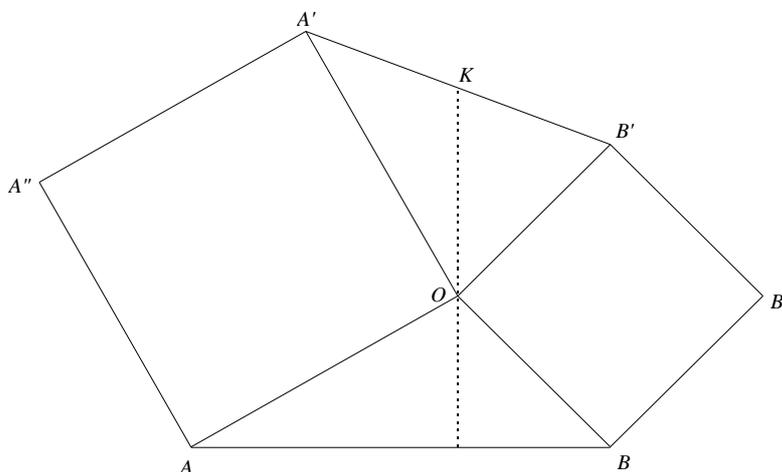
1. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de chaque cercle avec les axes de coordonnées. ($C_1 \cap (Ox)$; $C_1 \cap (Oy)$; $C_2 \cap (Ox)$ et $C_2 \cap (Oy)$)
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des deux cercles. ($C_1 \cap C_2$)
3. Soit D la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Déterminer les coordonnées des éventuels points de $D \cap C_1$ et $D \cap C_2$.

Exercice 35

Dans un repère orthonormé de centre O , on considère un triangle OAB de sens direct. On construit, à l'extérieur de ce triangle, des carrés $OAA''A'$ et $OBB''B'$. (Voir figure ci-dessous)

On note K le milieu de $[A'B']$.



1. Démontrer que les angles $(\vec{OA}; \vec{OB})$ et $(\vec{OB}'; \vec{OA}')$ sont supplémentaires.
2. Démontrer que :
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB}' = \vec{OA}' \cdot \vec{OB}$$
3. Calculer $\vec{OK} \cdot \vec{AB}$

En déduire que la médiane issue de O dans le triangle $OA'B'$ est la hauteur issue de O dans le triangle OAB .

4. Démontrer que les droites (AB') et $(A'B)$ sont perpendiculaires.